

Jakub VALIHRACH¹, Petr KONEČNÝ²

**PODMÍNKA UKONČENÍ PRAVDĚPODOBNOSTNÍHO VÝPOČTU PROVÁDĚNÉHO
METODOU MONTE CARLO**

EXIT CONDITION FOR PROBABILISTIC ASSESSMENT USING MONTE CARLO METHOD

Abstrakt

Příspěvek představuje podmínku sloužící k ukončení pravděpodobnostního výpočtu prováděného metodou Monte Carlo a k jeho vyhodnocení z hlediska vztahu mezi vypočteným odhadem pravděpodobností poruchy a návrhovou pravděpodobností. S odhadem pravděpodobnosti poruchy je nakládáno jako s náhodnou veličinou při uvážení jejího teoretického rozptylu v závislosti na provedeném počtu simulačních kroků Monte Carlo. Po teoretickém odvození rozhodovací podmínky následuje její numerické testování z hlediska přesnosti a výpočetní náročnosti. Představená podmínka je použitelná pro optimalizační návrh s využitím metody Monte Carlo.

Klíčová slova

Simulace Monte Carlo, podmínka ukončení, pravděpodobnost poruchy, návrhová pravděpodobnost, přesnost, konvergence, spolehlivost

Abstract

This paper introduces a condition used to exit probabilistic Monte Carlo simulation, and to evaluate it with regard to relation between computed estimate of probability of failure and design probability. Estimation of probability of failure is treated as a random variable, considering its variance that is dependent on number of performed Monte Carlo simulation steps. After theoretical derivation of the decision condition, it is tested numerically with regard of its accuracy and computational efficiency. The condition is suitable for optimization design using Monte Carlo method.

Keywords

Monte Carlo simulation, exit condition, probability of failure, design probability, accuracy, convergence, reliability

1 ÚVOD

Jednou z metod zkoumaných pro použití při pravděpodobnostním navrhování nebo posuzování stavebních konstrukcí je simulační metoda Monte Carlo, viz např. [2]. Základní předností této metody je její robustnost daná mimo jiné skutečností, že přesnost metody je nezávislá na dimenzi řešeného problému, tedy na počtu náhodných vstupních veličin. Často uváděnou nevýhodou je vysoký počet simulačních kroků nutných k dostatečně přesnému odhadu pravděpodobnosti poruchy P_F , zejména pro velmi malé hodnoty P_F . Podrobněji se této problematice věnoval jeden z autorů tohoto příspěvku v práci [1].

¹ Ing. Jakub Valihrach, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 384, e-mail: jakub.valihrach@vsb.cz.

² Ing. Petr Konečný, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 384, e-mail: petr.konecny@vsb.cz.

V návaznosti na tuto práci se autoři zaměřili na možnost snížení potřebného počtu simulačních kroků při těch aplikacích metody Monte Carlo, kdy není zapotřebí přesně vyčíslit pravděpodobnost poruchy P_f , ale pouze s dostatečnou mírou jistoty stanovit, zda je tato pravděpodobnost větší či menší než zadaná návrhová pravděpodobnost P_d . Příkladem aplikace, kde by tento zjednodušený výpočet našel uplatnění, je metodika pravděpodobnostního optimalizačního návrhu konstrukcí, kterou se zabývá druhý z autorů, viz např. [5].

Tento příspěvek si klade za cíl definovat podmínku, při jejímž splnění lze předčasně ukončit simulaci Monte Carlo a vyhodnotit její výsledek, tedy zda je pravděpodobnost poruchy větší, nebo menší než návrhová pravděpodobnost. Zároveň prezentuje výsledky numerického testování této podmínky při simulačních výpočtech spočívající v ověření její přesnosti a výpočetní náročnosti.

2 ODVOZENÍ PODMÍNKY

Metoda Monte Carlo je při posudku spolehlivosti konstrukcí využívána k výpočtu odhadu pravděpodobnosti poruchy P_f^* definovaného:

$$P_f^* = \frac{N_f}{N} \quad (1)$$

kde:

N_f – počet simulačních kroků, ve kterých byla detekována porucha,

N – celkový počet provedených simulačních kroků.

Přitom je dokázáno, že s rostoucím počtem provedených simulačních kroků takto vypočtený odhad pravděpodobnosti poruchy P_f^* konverguje ke skutečné hodnotě pravděpodobnosti poruchy P_f , viz např. [4].

Pravděpodobnost, že v jednotlivém kroku simulace Monte Carlo bude vygenerována porucha, je právě hledaná P_f ; lze tedy říci, že počet poruch vygenerovaných v jednom simulačním kroku je dán alternativním (též Bernoulliho) rozdělením $A(p)$ s parametrem $p = P_f$. Zároveň také platí, že tato pravděpodobnost je nezávislá na výsledcích předchozích simulačních kroků. Počet poruch N_f vygenerovaných v N krocích je tedy náhodnou veličinou danou součtem N těchto alternativních rozdělení, a lze jej tedy reprezentovat binomickým rozdělením $B(n, p)$:

$$N_f = B(n, p) = B(N, P_f) = \sum_{i=1}^N A_i(P_f) \quad (2)$$

Je známo, že pro dostatečně vysokou hodnotu parametru n lze binomické rozdělení aproximovat normálním (též Gaussovým) rozdělením $N(\mu, \sigma)$. Tento fakt lze odvodit z centrální limitní věty, podle které má součet velkého počtu náhodných veličin s libovolnými rozděleními normální rozdělení. Jak je patrné z výrazu (2), uvedený předpoklad je pro dostatečně velký počet simulačních kroků N splněn. Pro parametry μ (střední hodnota) a σ (směrodatná odchylka) získaného normálního rozdělení platí stejné vztahy dle [6] jako pro aproximované binomické rozdělení $B(N, P_f)$, tedy:

$$\mu_{N_f} = N \cdot P_f \quad (3)$$

$$\sigma_{N_f} = \sqrt{N \cdot P_f \cdot (1 - P_f)} \quad (4)$$

Jelikož je počet kroků, kdy byla detekována porucha, náhodnou veličinou s výše popsaným rozdělením, je náhodnou veličinou také odhad pravděpodobnosti poruchy P_f^* definovaný rovnicí (1), P_f^* má proto normální rozdělení s parametry:

$$\mu_{P_f^*} = \frac{\mu_{n_f}}{N} = P_f \quad (5)$$

$$\sigma_{P_f^*} = \frac{\sigma_{N_f}}{N} = \sqrt{\frac{P_f \cdot (1 - P_f)}{N}} \quad (6)$$

V průběhu simulačního výpočtu lze chápat průběžně aktualizovaný odhad pravděpodobnosti poruchy jako funkci $P_f^*(N)$, tedy náhodný proces. Ze vztahu (5) je patrné, že tento náhodný proces je centrován kolem pravděpodobnosti poruchy P_f , a ze vztahu (6) vyplývá, že směrodatná odchylka toho procesu klesá úměrně s $N^{-1/2}$. Je tedy zjevné, že pro $N \rightarrow \infty$ platí $P_f^*(N) \rightarrow P_f$, jak bylo uvedeno v úvodu této kapitoly.

Podstatou pravděpodobnostního posudku je porovnání vypočtené pravděpodobnosti poruchy P_f (resp. v případě použití metody Monte Carlo jejího odhadu) s návrhovou pravděpodobností P_d . Posuzovaná konstrukce je prohlášena za spolehlivou, pokud je splněna podmínka:

$$P_f^* < P_d \quad (7)$$

V optimalizačním výpočtu [5] je mnohokrát posuzována konstrukce s proměnlivými parametry ovlivňujícími pravděpodobnost poruchy, přitom pro většinu kombinací parametrů platí buď $P_f \gg P_d$, nebo $P_f \ll P_d$. Při takto značných nepoměrech mezi oběma pravděpodobnostmi není zapotřebí počítat P_f^* s velkou přesností, postačí, když lze s dostatečnou mírou jistoty prohlásit, zda je či není splněna podmínka (7). Tímto lze velmi výrazně snížit počet simulačních kroků potřebných v celém optimalizačním výpočtu.

Návrh řešení vedoucího k tomuto cíli, který autoři představují, předpokládá, že během simulačního výpočtu je hodnota odhadu pravděpodobnosti poruchy P_f^* průběžně sledována a porovnávána s návrhovou pravděpodobností P_d . Pokud je tento odhad blízký hodnotě P_d , výpočet pokračuje dalším simulačním krokem. Vzdálí-li se hodnota odhadu o více než definovanou toleranci ε , je výpočet ukončen. Tedy:

$$\begin{aligned} P_f^* < P_d - \varepsilon & \Rightarrow \text{Výsledek: } P_f < P_d. \\ P_d - \varepsilon < P_f^* < P_d + \varepsilon & \Rightarrow \text{Pokračuj dalším simulačním krokem.} \\ P_d + \varepsilon < P_f^* & \Rightarrow \text{Výsledek: } P_f > P_d. \end{aligned} \quad (8)$$

Pro výpočet tolerance ε je použit následující vztah:

$$\varepsilon = t \cdot \sigma = t \cdot \sqrt{\frac{P_d \cdot (1 - P_d)}{N}} \quad (9)$$

kde:

- t – násobek směrodatné odchylky,
- P_d – návrhová pravděpodobnost,
- N – počet dosud provedených simulačních kroků.

Ve vztahu (9) je využita směrodatná odchylka σ vypočtená podle vztahu (6), ovšem s použitím návrhové pravděpodobnosti P_d . Není tak zapotřebí počítat směrodatnou odchylku procesu $P_f^*(N)$, což vede k dalšímu zjednodušení celého simulačního výpočtu. Toto zjednodušení vychází z následujícího předpokladu: Pokud je hodnota P_f blízká hodnotě P_d , jsou si blízké i hodnoty tolerance ε vypočtené z $P_f^*(N)$ a z P_d a přesnost výpočtu tak není ovlivněna; tento předpoklad byl ověřen numericky, výsledek je na obr. 2. Naopak jsou-li hodnoty P_f a P_d vzdálené, na hodnotě ε příliš nezáleží, protože simulační výpočet bude ukončen již po malém počtu kroků, a tedy rozdíl absolutního počtu simulačních kroků pro ε vypočtené z $P_f^*(N)$ a z P_d není významný.

Uvedený násobek směrodatné odchylky t je závislý na požadované míře spolehlivosti výpočtu, tedy správného vyhodnocení podmínky (8). Platí, že čím je t vyšší, tím je vyšší i tato jistota, ovšem za cenu vyššího potřebného počtu simulačních kroků, viz též tab. 1. Při stanovení hodnoty t se vychází z šířky konfidenčního intervalu pro normální rozdělení podle vztahu:

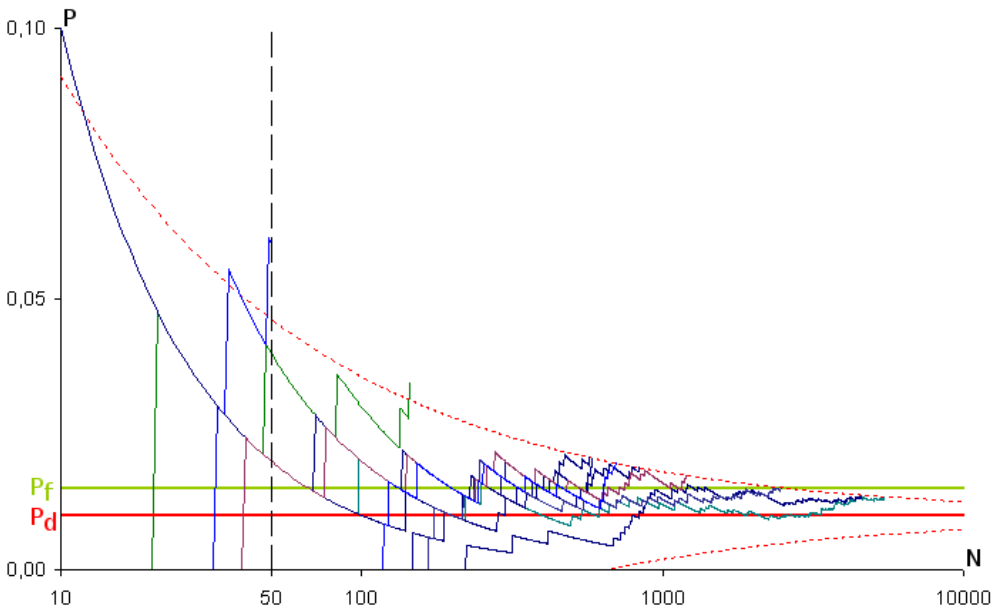
$$t = \Phi^{-1}\left(\frac{1+c}{2}\right) \quad (10)$$

kde:

Φ^{-1} – inverzní distribuční funkce normálního rozdělení,

c – teoretická míra jistoty, z intervalu (0; 1).

V průběhu testování podmínky se ukázalo, že velká část chybně vyhodnocených simulací byla způsobena tím, že odhad pravděpodobnosti poruchy $P_f^*(N)$ opustil meze $P_d \pm \varepsilon$ po velmi malém počtu kroků. Toto chování autoři připisují faktu, že pro malé N neplatí centrální limitní věta, a tím ani následující odvozené vztahy vycházející z předpokladu normálního rozdělení P_f^* . Proto byl zaveden další parametr podmínky ukončení simulačního výpočtu, kterým je minimální počet simulačních kroků N_{\min} , během kterých se podmínka netestuje. Podrobnosti o hodnotě N_{\min} a jejím vlivu na průměrný potřebný počet kroků a na spolehlivost výpočtu jsou uvedeny v následující kapitole. Příklad realizace takového výpočtu je uveden na obr. 1.



Obr.1: Příklad realizace podmínky pro 10 nezávislých simulačních běhů, plnou červenou čarou je hodnota $P_d = 0,010$, čárkovanou červenou čarou meze $P_d \pm \varepsilon$, světlezeleně hodnota $P_f = 0,015$, svislá čárkovaná čára představuje hodnotu $N_{\min} = 50$, před kterou se podmínka netestuje

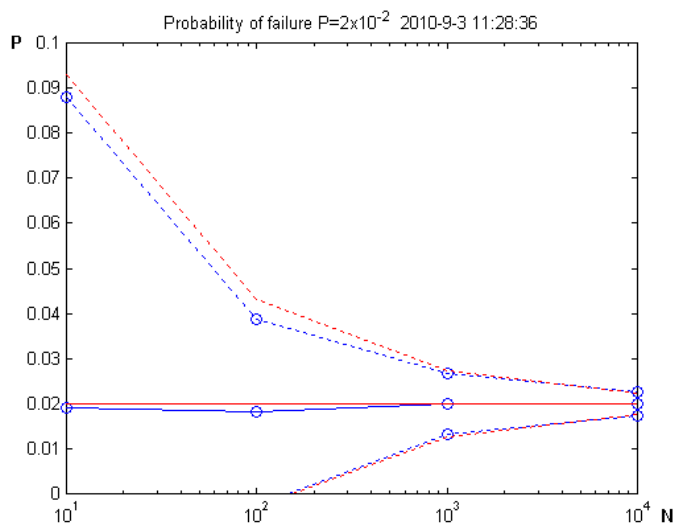
Dále je vhodné zavést maximální počet simulačních kroků N_{\max} , po kterých se výpočet ukončí, i když odhad $P_f^*(N_{\max})$ neopustil meze $P_d \pm \varepsilon$. Toto omezení zabrání situaci, kdy by v případě velmi blízkých hodnot P_f a P_d vedl výpočet k vysokému počtu simulačních kroků. Hodnota N_{\max} může být stanovena obvyklým způsobem jako nutný počet simulačních kroků pro posudek metodou Monte Carlo, např. podle [4]:

$$N_{\max} = P_d \left(1 - P_d\right) \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^2 \quad (11)$$

P_d – návrhová pravděpodobnost,

t – násobek směrodatné odchylky dle zvolené úrovně spolehlivosti,

ε – přípustná absolutní tolerance (polovina šířky konfidenčního intervalu).



Obr.2: Ověření předpokladu o směrodatné odchylce; modře hodnoty pro 100 simulovaných výpočtů, červeně teoretické hodnoty podle vztahů (8)

2 NUMERICKÉ TESTOVÁNÍ PODMÍNKY

2.1 Ověření předpokladu o směrodatné odchylce

Prvním předpokladem, který byl ověřován, je přesnost aproximace odhadu pravděpodobnosti poruchy P_f^* normálním rozdělením s parametry podle vztahů (5) a (6). V prostředí Matlab s využitím [3] bylo simulováno celkem 100 pravděpodobnostních výpočtů metodou Monte Carlo. Z hodnot odhadů pravděpodobnosti po 10, 100, 1000 a 10000 simulačních krocích byl vypočten průměr $\mu_{P_f^*}$ a směrodatná odchylka $\sigma_{P_f^*}$. Při předpokladu normality odhadů pravděpodobnosti poruchy P_f^* byly následně odvozeny 5% a 95% kvantily, které byly porovnány s mezemi vypočtenými podle vztahu (8) pro 90% teoretickou míru jistoty ($c = 0,9$). Výsledek tohoto porovnání je na obr. 2, z něžž je patrná dobrá shoda obou průběhů.

2.2 Vliv teoretické míry jistoty

K testování toho a následujících vlivů byl vytvořen program v jazyce C, který prováděl vlastní simulace a zároveň také počítal potřebné charakteristiky. Tyto charakteristiky byly exportovány do textových souborů, přičemž grafy (obr. 1, 3, 4) byly vytvořeny za pomoci software Excel.

Test vlivu teoretické míry jistoty zahrnoval vždy 10 000 simulačních výpočtů s hodnotami $P_f = 0,009$, $P_d = 0,010$ a $N_{\min} = 50$. Měněna byla hodnota násobku směrodatné odchylky t tak, aby odpovídala teoretickým mírám jistoty (konfidenčním intervalům) c uvedeným v tab. 1.

Tab.1: Vliv šířky konfidenčního intervalu pro $P_f = 0,009$, $P_d = 0,010$ a $N_{\min} = 50$

c	t	Míra spolehlivosti výpočtu (úspěšnost vyhodnocení $P_f < P_d$)	Průměrný počet simulačních kroků
0,9	1,645	71,94 %	9 306
0,99	2,576	92,67 %	50 215
0,999	3,291	97,24 %	94 471
0,9999	3,891	99,06 %	139 554

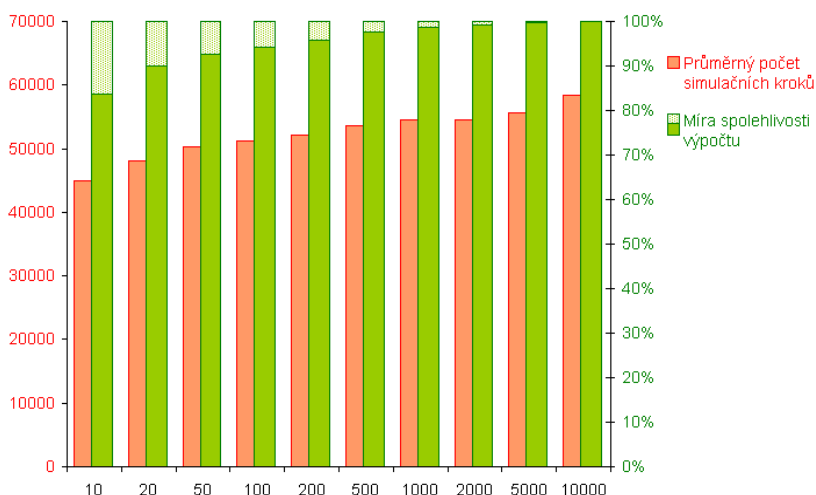
Kvalita vyhodnocení závisí na vzdálenosti mezi P_f a P_d – čím je rozdíl mezi pravděpodobnostmi větší, tím je větší úspěšnost rozhodovací procedury.

2.3 Vliv minimálního počtu simulačních kroků

Dalším testovaným parametrem byl minimální počet simulačních kroků, během nichž se neověřuje podmínka ukončení výpočtu. Stejně jako v předchozím testu bylo použito vždy 10 000 simulačních výpočtů s hodnotami $P_f = 0,009$, $P_d = 0,010$, $c = 0,99$ ($t = 2,576$). Měněna byla hodnota počtu kroků N_{\min} uvedená v tab. 2 a na obr. 3. Pro zajímavost, doporučený počet simulačních kroků metodou Monte Carlo pro výše uvedené parametry podle (10) činí 100 000 až 200 000. Je vidět, že i při vysoké hodnotě $N_{\min} = 10\,000$ je skutečnost, že $P_f < P_d$, vyhodnocena s takřka stoprocentní úspěšností průměrně už po cca 60 000 krocích.

Tab.2: Vliv minimálního počtu simulačních kroků pro $P_f = 0,009$, $P_d = 0,010$ a $t = 2,576$

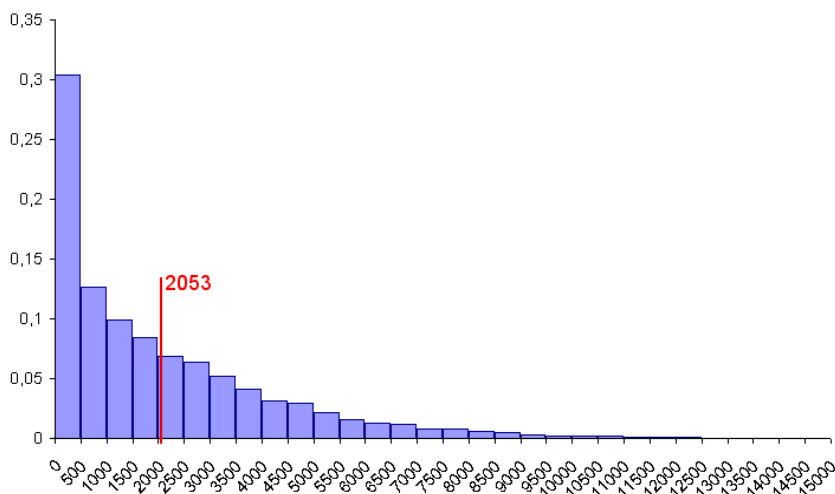
N_{\min}	Míra spolehlivosti výpočtu (úspěšnost vyhodnocení $P_f < P_d$)	Průměrný počet simulačních kroků
10	83,70%	44 989
20	90,04%	48 029
50	92,67%	50 215
100	94,19%	51 169
200	95,83%	52 147
500	97,57%	53 513
1000	98,77%	54 473
2000	99,15%	54 556
5000	99,75%	55 711
10000	99,95%	58 452



Obr.3: Vliv minimálního počtu simulačních kroků N_{\min} na průměrný počet simulačních kroků (levá svislá osa) a na míru spolehlivosti výpočtu (vyjádřeno podílem zaplnění zeleného sloupce)

2.4 Rozdělení počtu simulačních kroků

V předchozích tabulkách 1 a 2 je uveden průměrný počet simulačních kroků, po kterých bylo zjištěno splnění podmínky a ukončen simulační výpočet. Zajímavou charakteristikou, která pomůže zlepšit představu o fungování podmínky, je podoba rozdělení popisujícího počet těchto simulačních kroků. Toto rozdělení, pro hodnoty $P_f = 0,015$, $P_d = 0,010$, $t = 2,576$ a $N_{\min} = 50$, je zobrazeno pomocí histogramu na obr. 4. Průměrný počet simulačních kroků do skončení simulačního běhu byl v tomto případě 2053, dobře patrná je výrazná asymetrie rozdělení, cca 62 % hodnot se nachází pod průměrem.



Obr.4: Histogram počtu kroků, po kterých byla ukončena simulace, červeně průměrná hodnota

3 ZÁVĚR

V článku byla představena podmínka určená k ukončení simulace typu Monte Carlo. Cílem autorů je zejména snížení potřebného počtu simulačních kroků v případech, kdy je pravděpodobnost poruchy P_f výrazně odlišná od návrhové pravděpodobnosti P_d .

Při odvození podmínky je zavedeno a odůvodněno zjednodušení spočívající v tom, že vzdálenost mezi ε není počítána ze směrodatné odchylky odhadu pravděpodobnosti poruchy P_f^* , ale do pro ni odvozeného vztahu je dosazena návrhová pravděpodobnost P_d .

Představená podmínka je použitelná ke zrychlení optimalizačního výpočtu s využitím metody Monte Carlo. Z jejího numerického testování vyplynulo, že kvalita vyhodnocení závisí na zvolené míře spolehlivosti odhadu, vyjádřené parametrem t , a na minimálním počtu simulačních kroků N_{\min} , při kterých není podmínka ověřována, neboť zřejmě s dostatečnou mírou přesnosti neplatí předpoklady, na jejichž základě byla odvozena.

Zvolený přístup bude dále ověřován při optimalizačních výpočtech. Získané poznatky budou využity k upřesnění parametrů představené podmínky, případně k upřesnění definice samotné podmínky pro malý počet simulačních kroků.

PODĚKOVÁNÍ

Příspěvek byl realizován za finanční podpory z veřejných prostředků prostřednictvím Studentské grantové soutěže v rámci specifického výzkumu na VŠB – Technické univerzitě Ostrava. Registrační číslo projektu je SP/2010151.

LITERATURA

- [1] KONEČNÝ, P. Vliv počtu náhodně proměnných na přesnost odhadu pravděpodobnosti poruchy metodou Monte Carlo. *Sborník vědeckých prací VŠB-TUO, řada stavební*, 2009, s. 173-180. ISSN 1213-1962
- [2] MAREK, P., GUŠTAR, M., ANANOS, T. *Simulation-Based Reliability Assesment for Structural Engineers*. Boca Raton, Florida, CRC Press, 1995, ISBN 0-8493-8286-6.
- [3] PRAKS, P. Numerical aspects of Simulation Based Reliability Assessment of Systems. In *International Colloquium Euro-SiBRAM'2002*. Volume II. Prague : Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the CzechRepublic, 2002. ISBN 80-86246-17-5.
- [4] SCHUËLLER, G. Past, present & Future of Simulation-based Structural Analysis In *International Colloquium Euro-SiBRAM'2002*. Volume II. Prague : Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the CzechRepublic, 2002. ISBN 80-86246-17-5.
- [5] VALIHRACH, J., MAREK, P. Algoritmus pro navrhování konstrukcí s využitím simulace Monte Carlo. In *Vedecko-pedagogické aspekty stavebnej mechaniky, Zborník príspevkov z medzinárodného seminára*. Košice : TU Košice, 2009. ISBN 978-80-553-0245-4.
- [6] WEISSTEIN, E. W. *MathWorld--A Wolfram Web Resource* [online]. 1999, 2010-08-30 [cit. 2010-09-06]. Binomial Distribution. Dostupné z WWW: <<http://mathworld.wolfram.com/BinomialDistribution.html>>.

Oponentní posudek vypracoval:

Ing. Miroslav Sýkora, Ph.D., ČVUT v Praze - Kloknerův ústav.